Simulation der Augensumme zweier Würfel

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:
Bei dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler zuerst die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Augensumme beim Werfen zweier Würfel berechnen. Anschließend wird dann mit dem GTR der Wurf mit zwei Würfeln simuliert, dann werden die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Augensummen berechnet. Dadurch können die Schülerinnen und Schüler ihre Berechnungen kontrollieren.

Klassenstufe(n):
Klasse 7 bzw. 8

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen ...
- durch die Simulation mit dem GTR erkennen, ob sie bei ihrer Berechnung der Wahrscheinlichkeiten einen Fehler gemacht haben;
- durch diese Aufgabe auf die Voraussetzung für die Anwendung der Regel von Laplace, nämlich die Gleichverteilung, erneut hingewiesen werden;
- den Einsatz des GTR als Simulationsgerät weiter vertiefen.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
- Erzeugung einer Liste von ganzzahligen Zufallszahlen im *STAT*-Menü;
- Addition zweier Listen;
- Erzeugung eines Histogramms;
- „Tracen“ auf einem Histogramm, um die Werte ablesen zu können.

Zeitbedarf:
Eine Doppelstunde (90 Minuten)

Sonstige Materialien:
Keine

Begleittext

Die Schülerinnen und Schüler kennen in der Regel Würfelspiele, bei denen man zwei Würfel gleichzeitig werfen muss. Z. B. würfelt man beim Spiel „Die Siedler von Catan" mit zwei Würfeln und berechnet dann die Augensumme der beiden Würfel. Den meisten Schülerinnen und Schülern ist im Allgemeinen dieses Spiel bekannt, bei dem die Felder mit der Augensumme 6 und 8 besonders begehrt sind. Hier soll der Frage nachgegangen werden, warum das wohl so ist.

Die Aufgabe soll die Schülerinnen und Schüler auf die Voraussetzung für die Anwendung der Regel von Laplace, nämlich die Gleichverteilung, hinweisen. Häufig gehen sie bei diesem Problem, ohne Unterscheidung der Würfel, von einer Gleichverteilung aus und erhalten dann falsche Ergebnisse in Hinblick auf die vermuteten Häufigkeiten der auftretenden Augensumme.

Die Simulation mit dem GTR dient dabei primär der Kontrolle der eigenen Rechnung (die Schülerinnen und Schüler erkennen ihren Fehler). Es werden dadurch aber auch neue Fragen aufgeworfen.

Aufgabenstellung

Die Schülerinnen und Schüler sollten in Partnerarbeit folgende Aufgabe bearbeiten:

a) Versuche mit der Regel von Laplace die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Augensummen 2 bis 12 beim Wurf zweier Würfel zu berechnen.
b) Simuliere den Wurf mit zwei Würfeln 900-mal mit deinem GTR. Berechne die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Augensummen.
c) Vergleiche die Ergebnisse deiner Simulation mit deinen Ergebnissen aus a).

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall" findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen", (K3) „Mathematisch modellieren" und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen" durch die vorliegende Simulation angesprochen.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse hatte den GTR seit wenigen Monaten und bereits gelernt, wie man den Wurf mit einem Würfel mit dem GTR im *STAT*-Menü simulieren kann. Dabei hatten die Schülerinnen und Schüler auch gelernt, wie man für eine schnelle Auswertung der Simulation mit dem GTR ein Histogramm erstellt.

Methodische Hinweise

Die Aufgabe wurde in der Mathematikstunde als Partnerarbeit durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler hatten in der vorangegangenen Unterrichtsstunde die Regel von Laplace zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bei einem Laplace-Experiment kennengelernt.

Die Schülerinnen und Schüler sollen bei der Teilaufgabe a) zuerst versuchen die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und dabei zunächst durchaus den typischen Fehler der Nichtberücksichtigung der Gleichverteilung erleben dürfen, um dann durch die Simulation zu erkennen, dass ihre Ergebnisse in Teilaufgabe a) wohl nicht stimmen können. Die Methode, einen typischen Fehler bewusst zu provozieren, hat bei vielen Schülerinnen und Schülern den Effekt, dass sie den Fehler selbst erkennen können und der Lernprozess dadurch nachhaltiger ist. Häufig gehen viele Schülerinnen und Schüler von 21 möglichen Würfelergebnissen aus, die sie als gleich wahrscheinlich ansehen. Dass jedoch, ohne Unterscheidung der beiden Würfel, die Wahrscheinlichkeit für einen Pasch nur halb so groß ist wie für die anderen Konstellationen, übersehen sie häufig. Somit erfahren sie bei der Besprechung dieser Aufgabe, dass man, um die Regel von Laplace anwenden zu können, gelegentlich eine „künstliche“ Unterscheidung von Fällen vornehmen muss.

Die Simulation mit dem GTR ist relativ einfach durchzuführen. Jedoch streuen die Ergebnisse selbst bei *n=900* noch recht stark, so dass die relativen Häufigkeiten teilweise eine große Abweichung von den theoretischen Werten aufweisen. Deshalb sollte man die Simulationsergebnisse der ganzen Klasse im Plenum zusammenfassen. Dies kann entweder zu Beginn der Besprechung, als schlagkräftiges Argument gegen falsche Schülerlösungen bei Teilaufgabe a), oder am Ende der Besprechung zur Bestätigung der theoretischen Werte geschehen.

Zeitbedarf

Für die Aufgabe „Augensumme zweier Würfel“ hatten die Schülerinnen und Schüler 45 Minuten Bearbeitungszeit. Die Besprechung inklusive einer ausführlichen Diskussion über die Gleichverteilung durch die „künstliche“ Unterscheidung der beiden Würfel und das gemeinsame Zusammenfassen aller Simulationsergebnisse dauerte ebenfalls nochmals 45 Minuten. Somit ist eine Doppelstunde für diese Aufgabe anzusetzen.

Zur Rolle des GTR

Bei der Teilaufgabe a) spielt der GTR keine große Rolle, da die Schülerinnen und Schüler bei der Verwendung der Regel von Laplace die gesuchten Wahrscheinlichkeiten meist in Bruchschreibweise darstellen. Erst bei dem Vergleichen in Teilaufgabe c) werden die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeiten aus a) mit dem GTR in eine Dezimalzahl umrechnen (die Simulation in b) liefert ja die relativen Häufigkeiten als Dezimalzahlen). Hier dient der GTR also als Rechenhilfe (arithmetischer Einsatz). Für die Simulation in Teilaufgabe b) spielt der GTR dann die zentrale Rolle, da ohne GTR-Einsatz eine Simulation von 900 Würfen jeden üblichen zeitlichen Rahmen sprengen würde.

Durchführung

Die Aufgabe wurde der Klasse gleich zu Beginn der Unterrichtsstunde ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler durften sich einen Partner suchen, mit dem sie gemeinsam die Aufgabe lösen sollten. Der Zeitrahmen von 45 Minuten wurde ebenfalls zu Beginn mitgeteilt. Bei einer praktischen Erprobung machten bis auf zwei Schülerteams (insgesamt gab es 12 Zweierteams) alle Teams den „klassischen Fehler“, indem sie die beiden Würfel nicht unterschieden und trotzdem von einer Gleichverteilung ausgingen. Die beiden Teams, bei denen dieser Fehler nicht auftrat, unterschieden die Würfel jedoch nicht bewusst, sondern schrieben die 36 Möglichkeiten, wegen der besseren Übersicht in einem quadratischen Schema auf. Die meisten Teams merkten zwar anhand ihrer Simulation, dass ihre Ergebnisse aus Teil a) nicht stimmen konnten, sie konnten aber die Ursache dafür nicht erkennen. Die Schülerinnen und Schüler führten die Simulation weitgehend eigenständig durch. Allerdings benötigten einige Hilfe von ihrem Partner bzw. vom Lehrer. Dabei wussten manche auch nicht mehr genau, wie man ein Histogramm mit dem GTR erzeugt. Das Erzeugen zweier Listen mit natürlichen Zufallszahlen von 1 bis 6 bereitete keine Schwierigkeiten. Auch die Berechnung der Augensumme in einer dritten Liste gelang den meisten Zweierteams eigenständig. Nur ein Team berechnete die relativen Häufigkeiten im $STAT$-Menü mithilfe einer vierten und fünften Liste. Alle anderen Teams berechneten die relativen Häufigkeiten einzeln im RUN-Menü.

Bei der Besprechung der Aufgabe im Plenum ergab sich, dass die Simulationsergebnisse für die einzelnen Augensummen von Schüler zu Schüler teilweise erheblich voneinander abwichen. Auch gaben einige Schülerinnen und Schüler an, dass bei ihrer Simulation z. B. die Augensumme 10 häufiger als die Augensumme 9 vorkam. Um mehr Aussagekraft zu erhalten, wurden die Simulationsergebnisse aller 24 Schülerinnen und Schüler zusammengeführt. Im Durchschnitt aller Simulationen ($n = 21\,600$) ergaben sich Werte, die sehr nahe an den Werten lagen, die von den beiden Teams mit 36 Möglichkeiten berechnet worden waren.

In der anschließenden Diskussion im Plenum akzeptierten die Schülerinnen und Schüler zwar schnell, dass die Variante mit den 36 Möglichkeiten im Gegensatz zur Variante mit nur 21 Möglichkeiten wohl die richtigen Ergebnisse liefern würde, aber keine Schülerin bzw. kein Schüler konnte den Unterschied erklären. Erst durch gezielte Tipps (wir werfen einen Würfel zweimal) seitens des Lehrers wurde der Unterschied mit der Reihenfolge der Würfe begründet. Dennoch machte es vielen Schülerinnen und Schülern nach wie vor Probleme, sich vom tatsächlichen Würfelvorgang beim Spiel (gleichzeitiges Werfen zweier gleicher Würfel) loszulösen. Auch nachdem im Plenum die richtigen Werte für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten berechnet wurden, gab es noch einige Schülerinnen und Schüler, die nicht verstanden, dass erst die „künstliche“ Unterscheidbarkeit der beiden Würfel die von der Laplace-Regel geforderte Gleichverteilung liefert. Die letzten Zweifel wurden erst dadurch ausgeräumt, dass die Schülerinnen und Schüler die absoluten Häufigkeiten für die Augensumme 2 (1er Pasch) und die Augensumme 3 miteinander verglichen. Erst jetzt sahen sie ein, dass ohne die Unterscheidbarkeit, ein Pasch nur halb so wahrscheinlich ist, wie die Konstellation eine 1 und eine 2. Somit war dann klar, dass bei 21 Möglichkeiten keine Gleichverteilung vorliegt.

Mathematik Klasse 7 (AP)

Augensumme zweier Würfel

Bei vielen Würfelspielen, wie z. B. beim Spiel „Die Siedler von Catan", würfelt man mit zwei Würfeln und berechnet dann die Augensumme der beiden Würfel.

Beim Spiel „Die Siedler von Catan" sind die Felder mit der Augensumme 6 und 8 besonders begehrt. Warum ist das wohl so?

(Bemerkung: Bei der Augensumme 7 erhält man keine Rohstoffe, sondern der Räuber kommt zum Einsatz.)

a) Versuche mit der Regel von Laplace die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Augensummen 2 bis 12 zu berechnen.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit											

b) Simuliere den Wurf mit zwei Würfeln 900-mal mit deinem GTR. Berechne die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Augensummen.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
absolute Häufigkeit											
relative Häufigkeit											

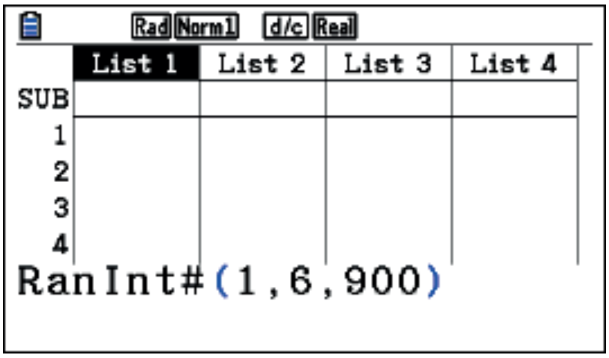
c) Vergleiche die Ergebnisse deiner Simulation mit deinen Ergebnissen aus a).

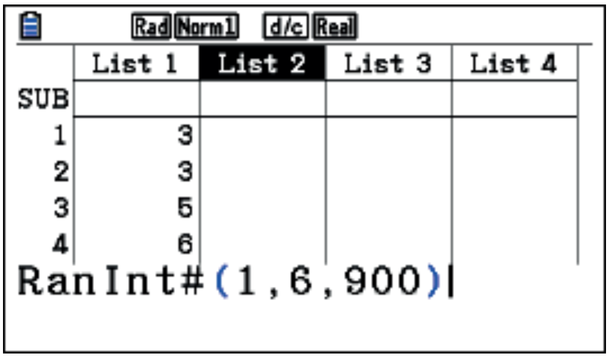
Lösungsvorschlag: Simulation der Augensumme zweier Würfel

Simulationsidee im *STAT*-Menü

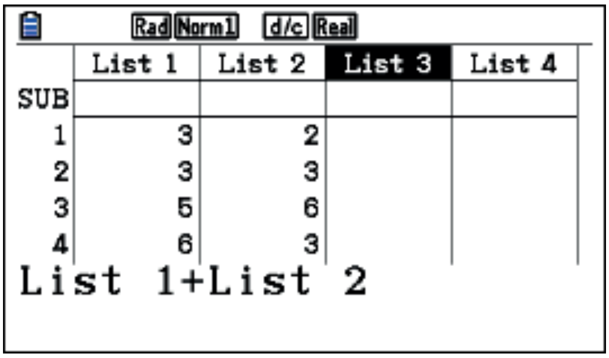
Zunächst müssen (mit Hilfe des *Ranint#*-Befehls) zwei Listen (für jeden Würfel eine) mit den Zufallsziffern 1 bis 6 angelegt werden.

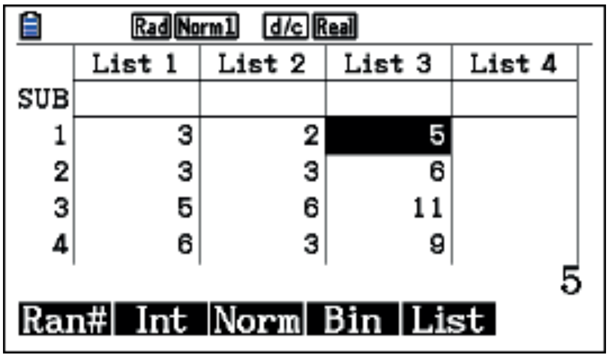
Syntax: iy(PROB)r(RAND)w(Int)





Anschließend wird in Liste 3 die Summe der Listen 1 und 2 gebildet.

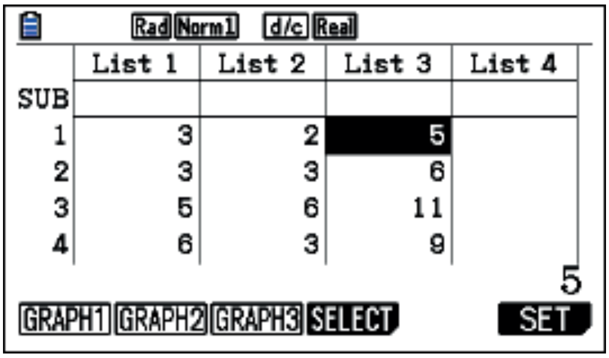


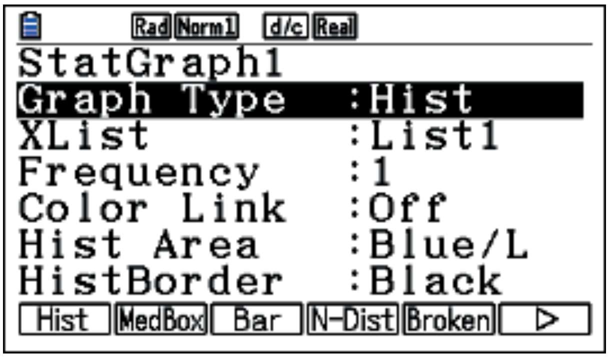


Auswertung:

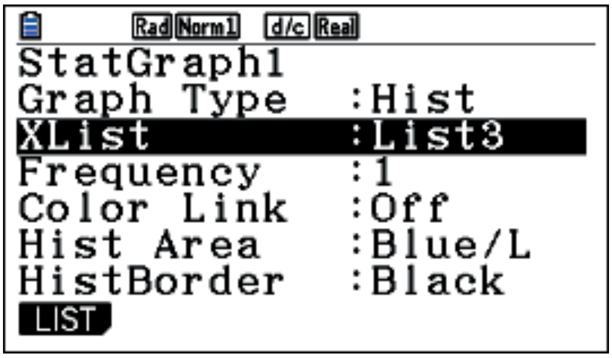
Um die Anzahl der verschiedenen Einträge 2 bis 12 zu bestimmen, wird von Liste 3 ein *Histogramm* erzeugt.

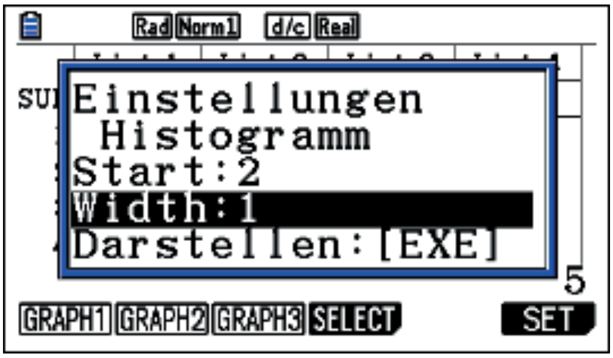
Um ein *Histogramm* zu erzeugen, muss man den *Graphiktyp* im *SET* umstellen. (Voreingestellt ist der *Graphiktyp „Scatter“*.)



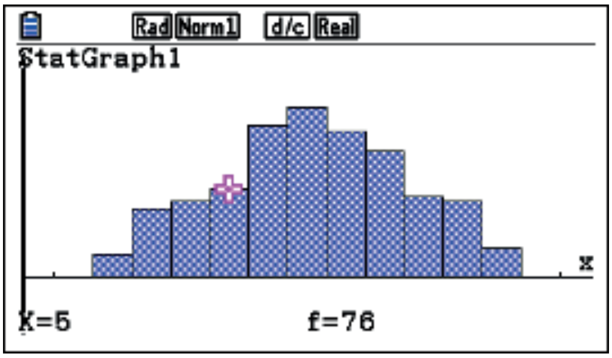


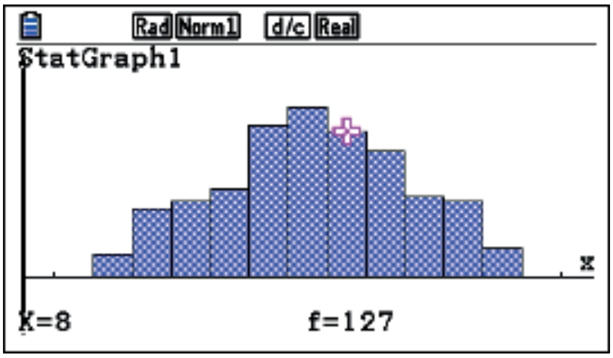
Tipp: Damit das *Histogramm* in Einerschritten durchlaufen werden kann, gibt man bei *Width* den Wert 1 ein.





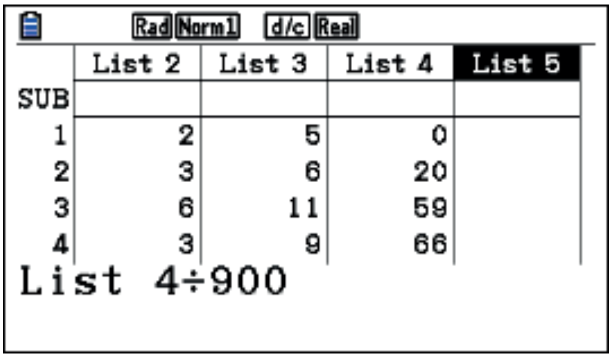
Die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Augensummen kann man durch „Tracen“ auf dem *Histogramm* leicht ablesen. **(Lq)**

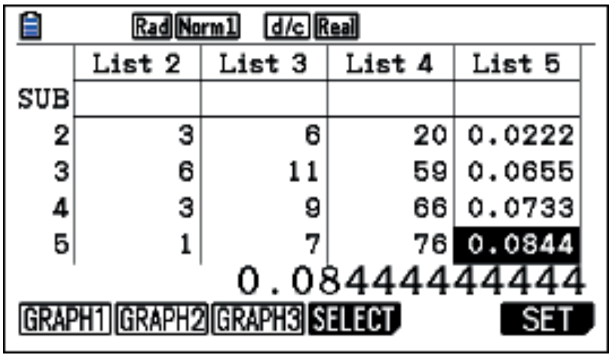




Die relativen Häufigkeiten berechnet man dann entweder einzeln im *RUN*-Menü oder man gibt die absoluten Häufigkeiten (von Hand) in eine Liste 4 ein und berechnet in der Liste 5 die gesuchten relativen Häufigkeiten (*List* 4: 900).

Dabei ist es vorteilhaft, wenn man in die erste Zelle der Liste 4 eine Null eingibt. Dann entspricht nämlich die Zellennummer ganz links der Augensumme und man kann die berechneten relativen Häufigkeiten besser ablesen.





Theoretisch berechnete Werte:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$